Билеты

математический Анализ

(4 семестр)

Семенова
Дарья
группа 205

2019 – 2020

«Действительный анализ» (2 курс, 4 семестр)

1. **Собственные интегралы, зависящие от параметра.**
Определение. Непрерывность, интегрируемость, дифференцируемость – в случае постоянных пределов интегрирования. Непрерывность, дифференцируемость (формула Лейбница) – в случае переменных пределов интегрирования.

2. **Несобственные интегралы, зависящие от параметра.**
Определение. Понятие равномерной сходимости интеграла на множестве, критерий Коши. Признаки Вейерштрасса, Дирихле-Абеля, Дини равномерной сходимости. Непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость несобственных интегралов. Теорема о несобственном интегрировании интегралов, зависящих от параметра. Примеры: вычисление интеграла Эйлера-Пуассона, интеграла Дирихле.

3. **Интегралы Эйлера.**
Определения гамма-функции и бета-функции. Область определения, непрерывность и дифференцируемость. Формулы приведения для гамма-функции и бета-функции, гамма-функция полуцелого положительного аргумента. Связь между эйлеровыми интегралами.

4. **Формула Стирлинга.**
Лемма о построении асимптотики методом Лапласа. Вывод асимптотики гамма-функции.

5. **Задача о наилучшем приближении в евклидовом пространстве. Общие ряды Фурье.**
Бесконечномерные евклидовы и псевдоевклидовы пространства, нормированные и почтинормированные пространства. Ортонормированные системы, тригонометрическая система функций. Решение задачи о наилучшем приближении, тождество Бесселя, неравенство Бесселя.

6. **Замкнутые и полные системы.**
Определение замкнутости системы. Равенство Парсеваля, сходимость ряда Фурье по норме. Полнота. Теорема о связи свойств замкнутости и полноты ортонормированных систем. Теорема о единственности ряда Фурье.

7. **Сходимость средних Чезаро для тригонометрического ряда Фурье.**
Интегральные представления частичных сумм и их средних Чезаро для тригонометрического ряда Фурье (ТРФ). Ядра Дирихле, ядра Фейера, их свойства. Теорема Фейера о равномерной сходимости, локальная теорема Фейера.

8. **Замкнутость тригонометрической системы.**
Теорема о замкнутости. Следствия замкнутости тригонометрической системы. Теорема Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции многочленами.

9. **Простейшие условия равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье.**
Равномерная сходимость ТРФ для функций, имеющих кусочно-непрерывную производную. Достаточные условия почленного дифференцирования ТРФ. Оценка скорости сходимости.

10. **Уточненные условия сходимости тригонометрического ряда Фурье.**
Свойства коэффициентов Фурье функций двух переменных. Главная часть частичной суммы ТРФ на множестве и в точке. Принцип локализации Римана. Функциональные классы Гёльдера, примеры. Равномерная сходимость ТРФ для функций из класса Гёльдера. Сходимость ТРФ в точке для функций, удовлетворяющих условию Гёльдера. Тригонометрический ряд Фурье на произвольном множестве, комплексная форма записи.

11. **Интеграл Фурье.**
Понятие преобразования Фурье для функций из класса $L_1(R)$. Свойства образа Фурье. Косинус- и синус-преобразования Фурье. Понятие о разложении функции в интеграл Фурье. Теорема о разложении для функций из класса Гёльдера. Разложения в терминах косинус- и синус-преобразований Фурье.

1. Собственные интегралы, зависящие от параметра

Пусть $f(x,y)$ определена для $x \in [a,b]$ и $y \in Y$. Для $\forall y \in Y$ $f(x,y)$ интегрируема на $[a,b]$. Тогда на Y определена ф-ия $I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ – ИНТЕГРАЛ, ЗАВИСЯЩИЙ ОТ ПАРАМЕТРА.

Теорема 1:

[Если $f(x,y) \in C(\Pi)$, где $\Pi = [a \le x \le b] \times [c \le y \le d]$, то $I(y) \in C[c,d]$]

Доказательство:

Рассмотрим $\forall y \in [c,d]$ и Δy, т.ч. $y + \Delta y \in [c,d]$.

$I(y+\Delta y) - I(y) = \int_a^b f(x, y+\Delta y)\,dx - \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b (f(x,y+\Delta y) - f(x,y))\,dx$

Так как $f \in C(\Pi)$, то f равномерно непрерывна на Π, поэтому:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |\Delta y| < \delta \Rightarrow |f(x,y+\Delta y) - f(x,y)| < \varepsilon/(b-a), \ \forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow |I(y+\Delta y) - I(y)| < \varepsilon/(b-a) \cdot \int_a^b dx = \varepsilon$

Теорема 2:

[Если $f(x,y) \in C(\Pi)$, то $I(y)$ интегрируема на $[c,d]$ и

$$\int_c^d I(y)\,dy = \int_a^b dx \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) \quad (1)$$]

Доказательство:

В силу утверждения теоремы 1 $I(y)$ интегрируема на $[c,d]$. Равенство (1) это следствие того, что его левые и правые части равны $\iint_\Pi f(x,y)\,dx\,dy$ как повторные интегралы.

Теорема 3:

[Если $f(x,y) \in C(\Pi)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \in C(\Pi)$, то $I(y)$ дифференцируема на $\forall$ т. $y_0 \in (c,d)$ и $I'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx \quad (2)$]

Доказательство:

Определим ф-ию $g(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$, которая по теореме 1 непрерывна на $[c,d]$.

$y \in [c,d]$: $\int_c^y g(t)\,dt = \int_c^y \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dt = \int_a^b dx \left(\int_c^y \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dt \right) =$

$= \int_a^b f(x,t)\Big|_{t=c}^{t=y} dx = \int_a^b f(x,y)\,dx - \int_a^b f(x,c)\,dx = I(y) - I(c)$

$\Rightarrow I'(y) = g(y)$ (так как $I(y)$ дифференцируема)

$f(x,y)$ определена на множестве D: $\{c \le y \le d,\ a(y) \le x \le b(y)\}$
рассмотрим ситуацию, когда $\forall y \in [c,d]$ определена ф-ия
$$I(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx$$

Теорема 4:

Пусть $f(x,y)$ определена в некотором прямоугольнике $П \supset D$, $a(y)$ и $b(y)$ непрерывны на $[c,d]$. Тогда $I(y) \in C[c,d]$

Доказательство:

Используем следующее тождество ($\forall y_0 \in [c,d]$):
$$I(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx = \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y)\,dx + \int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)\,dx - \int_{a(y_0)}^{a(y)} f(x,y)\,dx \quad (3)$$

Так как $f \in C(П)$, то по теореме 1, то $\int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y)\,dx$ непрерывна на $[c,d]$.

Оценим оставшиеся 2 интеграла:
$$\left|\int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)\,dx\right| \le \max_{(x,y)\in П} |f(x,y)| \cdot \left|\int_{b(y_0)}^{b(y)} dx\right| = M_0 \cdot |b(y) - b(y_0)| < \varepsilon_0,$$
если выбрать $\delta_0 > 0$: $|y - y_0| < \delta_0$ (! непрерывность $b(y)$)
$$\left|\int_{a(y_0)}^{a(y)} f(x,y)\,dx\right| \le \max_{(x,y)\in П} |f(x,y)| \cdot \left|\int_{a(y_0)}^{a(y)} dx\right| = M_1 \cdot |a(y) - a(y_0)| < \varepsilon_1,$$
если выбрать $\delta_1 > 0$: $|y - y_0| < \delta_1$ (! непрерывность $a(y)$)

$I(y) \to I(y_0)$ при $y \to y_0$

(4) - формула Лейбница

Теорема 5:

Пусть $f(x,y) \in C(П)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \in C(П)$ (где $П \supset D$), $a(y)$ и $b(y)$ дифф-мы в $\forall$ точке (c,d). Тогда $I(y)$ дифф-ма в $\forall$ точке y (c,d)
$$I'(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx + f(b(y),y)\cdot b'(y) - f(a(y),y)\cdot a'(y) \quad (4)$$

Доказательство:

Используем следующее тождество ($\forall y_0 \in [c,d]$):
$$I(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx = \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y)\,dx + \int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)\,dx - \int_{a(y_0)}^{a(y)} f(x,y)\,dx \quad (3)$$
$$\frac{d}{dy}\int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y)\,dx = \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} \frac{\partial f}{\partial y} f(x,y)\,dx \quad \text{(в том числе и при } y = y_0\text{)}$$

Для оставшихся слагаемых ищем производную в т. $y = y_0$ по определению:
$$\lim_{y\to y_0} \frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y\to y_0} \frac{1}{(y - y_0)} \cdot \int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)\,dx,$$ $\exists \xi$ между $b(y_0)$ и $b(y)$, что:
$$\int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)\,dx = f(\xi,y)(b(y) - b(y_0)) \Rightarrow \frac{1}{(y-y_0)} \cdot \int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)\,dx = f(\xi,y)\underbrace{\frac{b(y) - b(y_0)}{(y - y_0)}}_{\to\, b'(y_0) \text{ при } y\to y_0}$$

$f(\xi,y) \to f(b(y_0),y)$, т.к $b(y) \to b(y_0)$ и f – непрерывная ф-ия
$$\frac{1}{y - y_0}\int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)\,dx \to f(b(y_0),y_0) \cdot b'(y_0)$$

2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Рассмотрим $f(x,y)$, определенную на $[a\le x<+\infty)\times[c\le y\le d]$
Пусть $y\in[c,d]$, $\exists \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = I(y)$

Интеграл $I(y)$ РАВНОМЕРНО СХОДЯЩИЙСЯ на $Y\subset[c,d]$, если
$\forall\varepsilon>0\ \exists A\ge a$, т.ч. $\forall R>A\ \forall y\in Y$: $\left|\int_R^{+\infty} f(x,y)\,dx\right|<\varepsilon$

Теорема 1: (Критерий Коши)

[$I(y)$ равномерно сходится на $Y \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists A\ge a: \forall R_1,R_2>A,\ \forall y\in Y\ \left|\int_{R_1}^{R_2} f(x,y)\,dx\right|<\varepsilon$]

Теорема 2: (признак Вейерштрасса)

[Пусть $\exists g(x)$: $|f(x,y)|\le g(x)$, $\forall y\in Y$, $\forall x\ge a$. Кроме того, сходится $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$.
Тогда $I(y)$ сходится равномерно на Y.]

Доказательство:

$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится $\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists A\ge a$, т.ч. $\forall R_1,R_2$, т.ч. $A\le R_1\le R_2$: $\int_{R_1}^{R_2} g(x)\,dx<\varepsilon$

$$\left|\int_{R_1}^{R_2} f(x,y)\,dx\right| \le \int_{R_1}^{R_2}|f(x,y)|\,dx \le \int_{R_1}^{R_2} g(x)\,dx<\varepsilon$$

Теорема 3: (признак Дирихле-Абеля)

[Пусть $I(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\,dx$, $\forall y\in Y$. Если
1) $\int_a^t f(x,y)\,dx$ равномерно ограничен по $t\ge a$ и $y\in Y$;
2) $g(x,y)$ монотонна на $a\le x<\infty$ для каждого фиксированного $y\in Y$
$g(x,y)\rightrightarrows 0$ $(x\to+\infty)$ равномерно на $y\in Y$;
Тогда $I(y)$ сходится равномерно на y]

Доказательство:

1) $\forall t>a$, $y\in Y$ $\exists M$, т.ч. $\left|\int_a^t f(x,y)\,dx\right|\le M$
2) $\lim g(x,y)=0$: $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x>\delta, \forall y\in Y$: $|g(x,y)|<\varepsilon/2M$

По 2ой теореме о среднем $\exists\xi\in(R_1,R_2)$, т.ч.:

$$\int_{R_1}^{R_2} f(x,y)g(x,y)\,dx = g(R_1,y)\cdot\int_{R_1}^{\xi} f(x,y)\,dx + g(R_2,y)\cdot\int_{\xi}^{R_2} f(x,y)\,dx$$

$$\left|\int_{R_1}^{R_2} f(x,y)g(x,y)\,dx\right| \le \underbrace{|g(R_1,y)|}_{<\frac{\varepsilon}{2M}}\underbrace{\left|\int_{R_1}^{\xi} f(x,y)\,dx\right|}_{\le M} + \underbrace{|g(R_2,y)|}_{<\frac{\varepsilon}{2M}}\cdot\underbrace{\left|\int_{\xi}^{R_2} f(x,y)\,dx\right|}_{\le M} < \varepsilon$$

Теорема 4: (признак Дини)

[Пусть $I(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$, $y\in[c,d]$. Пусть $D=[x\ge a]\times[c\le y\le d]$. Если
1) $f(x,y)\in C(D)$, $f(x,y)>0$ на D
2) $I(y)\in C([c,d])$
Тогда $I(y)$ сходится равномерно.]

Доказательство:

Рассмотрим $I_n(y)=\int_a^{a+n} f(x,y)\,dx$

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ I_n(y)\in C[c,d] \\ 2)\ I_{n+1}(y)>I_n(y),\ \forall y\in[c,d] \\ 3)\ I_n(y)\to I(y),\ \text{где } I_n(y)\in C[c,d] \end{array}\right\}\ \text{по признаку Дини}\ \{I_n(y)\}\rightrightarrows I(y)\ \text{на}\ [c,d]$$

$\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon), \forall n\ge N: |I_n(y)-I(y)|<\varepsilon, \forall y\in[c,d] \Longrightarrow 0\le\int_{a+n}^{+\infty} f(x,y)\,dx<\varepsilon$

Рассмотрим $R\ge a+n$: $0\le\int_R^{+\infty} f(x,y)\,dx \le \int_{a+n}^{+\infty} f(x,y)\,dx<\varepsilon,\ \forall y\in[c,d] \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сходится равномерно на $[c,d]$

Теорема 5:

Если 1) $f(x,y)$ непрерывна на $D: [x \geq a] \times [c \leq y \leq d]$;

2) $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сходится равномерно на $[c,d]$

Тогда $I(y)$ непрерывна на $[c,d]$.

Доказательство:

$I_n(y) = \int_a^{a+n} f(x,y)\,dx$ — непрерывная на $[c,d]$ ф-ция

$\{I_n(y)\} \rightrightarrows I(y)$ на $[c,d]$ $\Rightarrow$ $I(y)$ непрерывна на $[c,d]$

Справедливо: $\lim\limits_{y\to y_0} I(y) = I(y_0) = \int_a^{+\infty} f(x,y_0)\,dx = \int_a^{+\infty} \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\,dx$, где $y_0 \in [c,d]$

Теорема 6:

Если 1) $f(x,y)$, $f'_y(x,y)$ непрерывны на $D: [x \geq a] \times [c \leq y \leq d]$;

2) $I(y)$ сходится хотя бы в 1 точке $y \in [c,d]$;

3) $\int_a^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx$ сходится равномерно на $[c,d]$;

Тогда $I(y)$ дифференцируема в $\forall$т. (c,d) и $I'(y) = \int_a^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx$

Доказательство:

$I_n(y) = \int_a^{a+n} f(x,y)\,dx$ — непрерывная ф-ция, дифф-мая в $\forall$ точке (c,d),

$I'_n(y) = \int_a^{a+n} f'_y(x,y)\,dx$

$\{I'_n(y)\} \rightrightarrows I'(y)$ на $[c,d]$ $\Rightarrow$ по теореме о дифф-ти предела функциональной последовательности следует утверждение теоремы.

Теорема 7:

Если 1) $f(x,y)$ непрерывна на $D: [x \geq a] \times [c \leq y \leq d]$;

2) $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сходится равномерно на $[c,d]$.

Тогда $I(y)$ интегрируема на $[c,d]$ и $\int_c^d I(y)\,dy = \int_a^{+\infty}\int_c^d f(x,y)\,dx\,dy$

Доказательство:

1. $\forall \varepsilon > 0\ \exists R_0 \geq a,\ \forall R > R_0,\ \forall y \in [c,d]: \left|\int_R^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{d-c} \Rightarrow I(y)$ интегр. на $[c,d]$
2. $I_n(y) = \int_a^{a+n} f(x,y)\,dx \Rightarrow \int_c^d I_n(y) = \int_a^{a+n} dx \int_c^d f(x,y)\,dy$

   $\{I_n(y)\} \rightrightarrows I(y)$ на $[c,d]$

   $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \int_c^d I_n(y)\,dy = \int_c^d I(y)\,dy = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^{a+n} dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_a^{\infty} dx \int_c^d f(x,y)\,dy$

Теорема 8:

Равенство $\int_c^d I(y)\,dy = \int_a^{+\infty}\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$ выполнено, если:

1) $f(x,y)$ непрерывна на $D: [x \geq a] \times [c \leq y \leq d]$;

2) $f(x,y) > 0$ на $D: [x \geq a] \times [c \leq y \leq d]$;

3) $I(y)$ непрерывна на $[c,d]$

Доказательство:

По признаку Дини: $I(y)$ равномерно сходится на $[c,d]$ и по теореме 7 следует утверждение теоремы 8.

Теорема 9:

Пусть $f(x,y)$ определена, неотрицательна и непрерывна на $D: [x\geq a]\times[c\leq y\leq d]$;
Пусть $I(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$, $K(x)=\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ сходятся и непрерывны на множествах $[y\geq c]$ и $[x\geq a]$ соответственно.
Тогда из сходимости одного из интегралов $\int_c^{+\infty} I(y)\,dy$ и $\int_a^{+\infty} K(x)\,dx$ следует сходимость другого и их равенство между собой.

Доказательство:

Пусть сходится $\int_c^{+\infty} I(y)\,dy$. Докажем, что $\int_a^{+\infty} K(x)\,dx$ сходится

$\int_a^R K(x)dx = \int_a^R\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy\,dx = [\text{Т. } 8] = \int_c^{+\infty}\int_a^R f(x,y)\,dx\,dy$

Рассмотрим $\int_c^{+\infty} I(y)dy - \int_a^R K(x)\,dx = \int_c^{+\infty}\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy - \int_c^{+\infty}\int_a^R f(x,y)\,dx\,dy =$
$= \int_c^{+\infty}\int_R^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy$

$\forall r>0:\ \int_c^{+\infty}\int_R^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^{r}\int_R^{+\infty} f(x,y)\,dy\,dx + \int_r^{+\infty}\int_R^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy$

Т.к. $\int_c^{+\infty} I(y)dy$ сходится, то $\forall\varepsilon>0\ \exists r_0>c,\ \forall r>r_0:\ 0\leq\int_r^{+\infty} I(y)dy<\varepsilon \Rightarrow \int_r^{+\infty}\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy<\varepsilon$

$\Rightarrow \forall R>a\cdot\ 0<\int_r^{+\infty}\int_R^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy<\varepsilon$

Итак, для $r=r_0$ второе слагаемое неотрицательно и меньше ε

Т.к. $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сходится равномерно на $[c,r_0]$ по признаку Дини

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists R_0\geq a:\ \forall R>R_0: \int_R^{+\infty} f(x,y)\,dx < \varepsilon/(r_0-c)\ \ \forall y\in[c,r_0] \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_c^{r_0}\int_R^{+\infty} f(x,y)\,dy\,dx<\varepsilon$

Вычисление интеграла Пуассона

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$ Докажем эту формулу, используя интеграл ЗоП
$2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx \equiv 2I$

1) В интеграле I выполним замену переменной $x\to t$: $x=ty$, где $y>0$ – произвольный положительный параметр $I=\int_0^{+\infty} e^{-y^2/t^2}dt$

2) $\int_0^{+\infty} Ie^{-y^2}dy = I\int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy = I^2$

3) Рассмотрим повторный интеграл в левой части !
$I^2=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} e^{-y^2t^2}y\,dt\right)e^{-y^2}dy = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} ye^{-(1+t^2)y^2}dt\right)dy \overset{!}{=} \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} ye^{-(1+t^2)y^2}dy\right)dt =$
$=\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-(1+t^2)y^2}d(y^2)\right)dt = \int_0^{+\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

4) Обоснование перехода !
$f(y,t)=ye^{-(1+t^2)y^2}$ – непрерывна и неотрицательна
$\int_0^{+\infty} f(y,t)\,dy = \frac{1}{2(1+t^2)}$ – непрерывна на $[0,+\infty)$
$\int_0^{+\infty} f(y,t)\,dt = I\cdot e^{-y^2}$ – непрерывна на $[0,+\infty)$

Применение теоремы 9 обосновывает переход !

Вычисление интеграла Дирихле

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

1) $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cdot\frac{\sin x}{x}\,dx \equiv I(\alpha)$ Интеграл сходится при $\forall \alpha>0$

2) $\Phi(\alpha,x) \equiv \int e^{-\alpha x}\cdot\sin x\,dx = -\int e^{-\alpha x}\,d(\cos x) = -e^{-\alpha x}\cos x + \int \cos x\, d(e^{-\alpha x}) =$
$= -e^{-\alpha x}\cos x - \alpha\int \cos x\, e^{-\alpha x}\,dx = -e^{-\alpha x}\cos x - \alpha\left(e^{-\alpha x}\sin x - \int \sin x\, d(e^{-\alpha x})\right) =$
$= -e^{-\alpha x}(\cos x + \alpha\cdot\sin x) - \alpha^2\int e^{-\alpha x}\sin x\,dx$
$\Phi(\alpha,x) = -e^{-\alpha x}\cdot(\cos x+\alpha\sin x) - \alpha^2\Phi(\alpha,x) \Rightarrow \Phi(\alpha,x) = -\frac{\cos x+\alpha\sin x}{1+\alpha^2}\cdot e^{-\alpha x} \Rightarrow$
$\Rightarrow |\Phi(\alpha,x)| \le \frac{\sqrt{\alpha^2+1}}{\alpha^2+1} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+1}} \le 1$
$|\alpha\sin x+\cos x| = \sqrt{\alpha^2+1}\cdot|\sin(x+\varphi)| \le \sqrt{\alpha^2+1}$

3) Докажем, что $I(\alpha)$ сходится равномерно на $\{\alpha\ge 0\}$
$\int_R^{+\infty} e^{-\alpha x}\cdot\frac{\sin x}{x}\,dx = \int_R^{+\infty}\frac{1}{x}\,d\Phi(x,\alpha) = \frac{\Phi(x,\alpha)}{x}\Big|_{x=R}^{x=+\infty} + \int_R^{+\infty}\Phi(x,\alpha)\frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{\Phi(R,\alpha)}{R} + \int_R^{+\infty}\frac{\Phi(x,\alpha)}{x^2}\,dx$
$\Rightarrow \left|\int_R^{+\infty} e^{-\alpha x}\cdot\frac{\sin x}{x}\,dx\right| \le \frac{|\Phi(R,\alpha)|}{R} + \int_R^{+\infty}\frac{|\Phi(x,\alpha)|}{x^2}\,dx \le \frac{1}{R} + \int_R^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \frac{2}{R}\ (\forall\alpha\ge 0)$
Из опр. $I(\alpha)$ сходится равномерно

4) Из теоремы о непрерывности интеграла, зависящего от параметра
$\lim\limits_{\alpha\to 0+0} I(\alpha) = \int_0^{+\infty}\lim\limits_{\alpha\to 0+0} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$

5) Рассмотрим $\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(e^{-\alpha x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)dx = \int_0^{+\infty}(-x)\cdot e^{-\alpha x}\cdot\frac{\sin x}{x}\,dx = -\Phi(x,\alpha)\Big|_{x=0}^{x=+\infty} =$
$= -\left(0+\frac{1}{\alpha^2+1}\right) = -1/\alpha^2+1$

6) Покажем, что интеграл п.5 сходится равномерно на $\forall$ множестве значений параметра вида $0<\alpha_0\le\alpha<+\infty$: $|e^{-\alpha x}\sin x| \le e^{-\alpha_0 x}$, $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha_0 x}dx$ сходится.
Равномерная сходимость следует из признака Вейерштрасса.
Поэтому в $\forall$ точке мн-ва $0<\alpha_0\le\alpha<+\infty$ справедливо равенство:
$\frac{d}{d\alpha}I(\alpha) = \int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\right)dx = -1/\alpha^2+1$
Т.о, для $\forall\alpha>0$: $I'(\alpha) = -\frac{1}{\alpha^2+1} \Rightarrow I(\alpha) = -\operatorname{arctg}\alpha + C$
В силу непрерывности $I(\alpha)$ на $[0,+\infty)$ последнее равенство верно для $\forall\alpha\ge 0$.

7) Выясним поведение $I(\alpha)$ при $\alpha\to+\infty$:
$|I(\alpha)| \le \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cdot\frac{|\sin x|}{x}\,dx \le \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha} \to \lim\limits_{\alpha\to\infty} I(\alpha) = 0$, $I(\alpha) = -\operatorname{arctg}\alpha + C\ (\alpha\to+\infty)$

$I(0) = I = \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$

3. Интегралы Эйлера

Гамма-функция $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1}\,dx$

Бета-функция $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$

Область определения:

- $\Gamma(p) = \underbrace{\int_0^1 e^{-x} x^{p-1}\,dx}_{\text{I}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} e^{-x} x^{p-1}\,dx}_{\text{II}}$

$\text{I}: e^{-x}x^{p-1} \le x^{p-1} \leftarrow \begin{cases} p-1 \ge 1 - \text{сх-ся} \\ p \le 0 - \text{расх-ся} \end{cases}$

$\text{II}: e^{-x}x^{p-1} = e^{-\frac{x}{2}} \cdot \frac{x^{p-1}}{e^{-\frac{x}{2}}} \le C \cdot e^{-\frac{x}{2}} \leftarrow \forall p$ сх-ся

$\Gamma(p)$ определена при $p>0$

- $B(p,q) = \underbrace{\int_0^{1/2} x^{p-1}\overbrace{(1-x)^{q-1}}^{\text{огр}}\,dx}_{\text{I}} + \underbrace{\int_{1/2}^{1} \overbrace{x^{p-1}}^{\text{огр}}(1-x)^{q-1}\,dx}_{\text{II}}$

I. $0 < x^{p-1}(1-x)^{q-1} \le C \cdot x^{p-1}$, где $\int_0^{1/2} x^{p-1}\,dx$ сх-ся при $p>0$

II. $0 < x^{p-1}(1-x)^{q-1} \le C\cdot(1-x)^{q-1}$, где $\int_0^{1/2} (1-x)^{q-1}$ сх-ся при $q>0$

$B(p,q)$ определена при $p>0,\ q>0$

а) непрерывность $\Gamma(p)$

Рассмотрим $0<p_0 \le p \le p_1 < +\infty$ с произвольными p_0 и p_1 $(p_0<p_1)$

Покажем, что $\Gamma(p)$ сходится равномерно:

$\left.\begin{array}{l} \int_0^1 e^{-x}x^{p-1}\,dx \le \int_0^1 x^{p_0-1}\,dx \ - \text{сходится} \\ \int_1^{\infty} e^{-x}x^{p-1}\,dx \le \int_1^{+\infty} e^{-x}x^{p_1-1}\,dx - \text{сходится} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{пр. Вейерштрасса}}$ есть равномерная сходимость

$\Rightarrow \Gamma(p)$ непрерывна на $\forall$ мн-ве $[p_0, p_1] \Rightarrow$ на $p>0$

б) дифференцируемость $\Gamma(p)$

$\int_0^{+\infty} (e^{-x}x^{p-1})'_p\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{p-1}\ln x\,dx$

$0<p_0\le p\le p_1<+\infty$: $x>1$: $e^{-x}x^{p-1}\ln x \le e^{-x}x^{p_1-1}\ln x = e^{-\frac{x}{2}}\cdot \overset{\text{огр}}{\frac{x^{p_1-1}\ln x}{e^{\frac{x}{2}}}} \le Ce^{-\frac{x}{2}}$ $\quad x\to+\infty \to 0$

$0<x<1$: $|e^{-x}x^{p-1}\ln x| \le e^{-x}x^{p-1}\ln\frac{1}{x} \le 1\cdot x^{p_0-1}\ln\frac{1}{x} = x^{\frac{p_0}{2}-1}\cdot \overset{\text{огр}}{x^{\frac{p_0}{2}}\cdot\ln\frac{1}{x}} \le Cx^{\frac{p_0}{2}-1}$ $\quad x\to 0+0 \to 0$

$\Longrightarrow$ равномерная сходимость на $\forall$ мн-ве $[p_0, p_1] \Rightarrow$ на $p>0$

$\Gamma'(p) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{p-1}\ln x\,dx,\ \forall p>0 \Rightarrow \Gamma'(p)$ непрерывна на $p>0$

$\Gamma^{(k)}(p) = \int_0^{+\infty} (e^{-x}x^{p-1})^{(k)}_p\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{p-1}(\ln x)^k\,dx$

Т.е гамма-функция имеет производные $\forall$ порядка на области определения

в) значения $\Gamma(p)$ в натуральных p

$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{n-1}\,dx = -\int_0^{+\infty} x^{n-1}\,de^{-x} = -x^{n-1}e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + (n-1)\int_0^{+\infty} x^{n-2}e^{-x}\,dx = \{n\ge 2\} = (n-1)\Gamma(n-1)$

$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}$: $\Gamma(n+1) = n\cdot\Gamma(n)$, $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1 \Rightarrow \Gamma(n+1) = n!\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}$

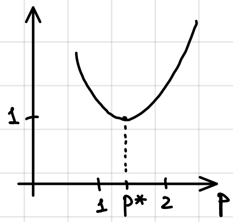
Формула приведения: $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p),\ \forall p>0$

$\Gamma''(p) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{p-1}e^{-t}\,dt \Rightarrow \Gamma''(p)>0 \Rightarrow \Gamma(p)$ выпукла вниз и $\Gamma'(p)\nearrow$ на $p>0$

$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1 \Rightarrow \exists!\ p^*\in(1,2)$: $\Gamma(p^*) = \min_{1\le p\le 2}\Gamma(p)$ (по т-ме Ролля)

Поведение $\Gamma(p)$ при $p\to 0+0$: $\Gamma(p) = \Gamma(p+1)\cdot\frac{1}{p} \sim \frac{1}{p}$

Поведение $\Gamma(p)$ при $p\to+\infty$: $\Gamma(p)\nearrow$, т.к $\Gamma(p)$ выпукла вниз, то $\lim_{p\to+\infty}\Gamma(p) = +\infty$



Наклонные асимптоты при $p\to+\infty$: $\lim_{p\to\infty}\frac{\Gamma(p)}{p} = \lim_{p\to\infty}\frac{\Gamma(p+1)}{p+1} = \lim_{p\to\infty}\frac{p}{p+1}\Gamma(p) = +\infty$

Формулы для $B(p,q)$

а) Симметричность, $B(p,q)=B(q,p)$

$$B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt=\{u=1-t\}=-\int_1^0(1-u)^{p-1}u^{q-1}du=B(q,p)$$

б) Формула приведения для $B(p,q)$

$$B(p+1,q)=\int_0^1 t^p(1-t)^{q-1}dt=-\frac{1}{q}\int_0^1 t^p d(1-t)^q=-\frac{1}{q}t^p(1-t)^q\Big|_{t=0}^{t=1}+\frac{1}{q}\int_0^1(1-t)^q p t^{p-1}dt=$$

$$=p/q\int_0^1(1-t)(1-t)^{q-1}\cdot t^{p-1}dt=p/q\int_0^1(1-t)^{q-1}t^{p-1}dt-p/q\int_0^1(1-q)^{t-1}t^p dt$$

$$\Rightarrow B(p+1,q)=p/q\,B(p,q)-p/q\,B(p+1,q)$$

Таким образом, $B(p+1,q)=p/(p+q)\,B(p,q)$, $B(p,q+1)=q/(p+q)\,B(p,q)$ (по п. а))

Связь между интегралами Эйлера

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Доказательство:

- $x=ut,\ u>0$: $\Gamma(p)=u^p\int t^{p-1}e^{-ut}dt$ и $B(p,q)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}dt$
- $u=1+v$, p заменим $p+q$: $\Gamma(p+q)(1+v)^{-p-q}=\int_0^{+\infty}t^{p+q-1}e^{-(1+v)t}dt$

$$\Gamma(p+q)\frac{v^{p-1}}{(1+v)^{p+q}}=\int_0^{+\infty}t^{p+q-1}e^{-(1+v)t}v^{p-1}dt$$

Предположим, что $p>1$, $q>1$ и рассмотрим в области $t\geq0, v\geq0$ ф-ию $f(t,v)=t^{p+q-1}\cdot v^{p-1}\cdot e^{-(1+v)t}$, очевидно, что $f(t,v)\geq0$

Далее $I(v)=\int_0^{+\infty}f(t,v)\,dt=\Gamma(p+q)\cdot v^{p-1}\cdot(1+v)^{-(p+q)}$ – непрерывная ф-ия на $v\geq0$

$K(t)=\int_0^{+\infty}f(t,v)dv=t^{p+q-1}\cdot e^{-t}\cdot\int_0^{+\infty}e^{-tv}\cdot v^{p-1}dv=\Gamma(p)\,t^{q-1}\cdot e^{-t}$ – непр. ф-ия на $t\geq0$

Существует $\int_0^{+\infty}K(t)dt=\int_0^{+\infty}dt\int_0^{+\infty}f(t,v)\,dv=\int_0^{+\infty}\Gamma(p)t^{q-1}e^{-t}dt=\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)$

$\Rightarrow$ по теореме о несобственном интегрировании интегралов, зависящих от параметров (билет 2, теорема 9) $\int_0^{+\infty}I(v)dv=\int_0^{+\infty}K(t)\,dt$

$$\int_0^{+\infty}I(v)dv=\int_0^{+\infty}\Gamma(p+q)v^{p-1}\cdot(1+v)^{-(p+q)}dv=\Gamma(p+q)\int_0^{+\infty}v^{p-1}\cdot(1+v)^{-(p+q)}dv=\int_0^{+\infty}K(t)dt=\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)$$

$$\Rightarrow \Gamma(p+q)\cdot\int_0^{+\infty}\frac{v^{p-1}}{(1+v)^{p+q}}dv=\Gamma(p+q)\cdot B(p,q)=\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)$$

Таким образом, для всех $p>1$ и $q>1$ выполняется: $B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

Распространим на $p>0$ и $q>0$: $B(p+1,q+1)=\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}$

По формулам приведения: $B(p+1,q+1)=\frac{p}{p+q+1}B(p,q+1)=B(p,q)\cdot\frac{pq}{(p+q+1)(p+q)}$

$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$, $\Gamma(q+1)=q\Gamma(q)$ и $\Gamma(p+q+2)=(p+q+1)(p+q)\Gamma(p+q)$

$$\Rightarrow B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$ для всей области $p>0$ и $q>0$

Отсюда следует, что 1) $B(p,q)$ – непрерывна на $p>0$, $q>0$
2) $B(p,q)$ имеет $\forall$ производные по p,q $\forall$ порядка в $p>0$, $q>0$

4. Формула Стирлинга $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n (1+\overline{\overline{o}}(1)),\ n\to\infty$

$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} x^n \cdot e^{-x}\,dx$

Рассмотрим ф-ию $x^n \cdot e^{-x} = \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(\frac{x}{n}\right)^n \cdot e^{n-x}$

Она возрастает на $[0,n]$ от 0 до $(n/e)^n$ и убывает на $[n,+\infty)$ от $(n/e)^n$ до 0.

$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n \cdot e^{n-x}\,dx$, где $\left(\frac{x}{n}\right)^n \cdot e^{n-x}$ возраст. от 0, 1 и убывает на $[n,+\infty)$ от 1 до 0.

Поэтому можно сделать замену переменных $\left(\frac{x}{n}\right)^n \cdot e^{n-x} = e^{-t^2}$ (*)

При этом сегменту $[0,n]$ изменения x будет отвечать $(-\infty, 0]$ изм. t

$[n,+\infty)$ изменения x — $[0,+\infty)$ изменения t

(*) Для $\forall x \neq n$: $\frac{dx}{dt} = \frac{2tx}{x-n}$;

$\exists\theta\in(0,1)$, форма Лагранжа

$t^2 = x-n-n\ln\left(1+\frac{x-n}{n}\right)$, где $\ln\left(1+\frac{x-n}{n}\right) = \frac{x-n}{n} - \frac{1}{2}\frac{(x-n)^2}{(n+\theta(x-n))^2} \Rightarrow t^2 = \frac{n}{2}\cdot\frac{(x-n)^2}{(n+\theta(x-n))^2}$

$\Rightarrow \frac{n}{x-n} = \frac{1}{t}\cdot\sqrt{\frac{n}{2}} - \theta \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2t\left(\frac{1}{t}\sqrt{\frac{2}{n}}+1-\theta\right) = 2\sqrt{\frac{n}{2}} + 2t(1-\theta)$

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{n}\right) e^{n-x}\,dx = \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\left(2\sqrt{\frac{n}{2}} + 2t(1-\theta)\right)dt =$$

$$= \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt + \frac{2}{\sqrt{2n}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t(1-\theta)\,dt\right)$$

Оценим $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t(1-\theta)\,dt \leq 2\int_0^{+\infty} t e^{-t^2}\,dt = -e^{-t^2}\Big|_0^{+\infty} = 1$

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$ и $\sqrt{\pi} > 2$

$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}\left(1+\frac{\omega}{\sqrt{n}}\right)$, где $|\omega| \leq 1$

Метод Лапласа

(*) **Лемма:** Пусть $f(y)$ интегрируема на $[-a,a]$ $(a>0)$ и справедливо представление: $f(y)=c_0+c_1y+c_2y^2+\ldots+c_{2n-1}y^{2n-1}+O(y^{2n})$

Тогда $\int_{-a}^{a}e^{-\lambda y^2}f(y)\,dy=c_0\frac{\Gamma(\frac12)}{\lambda^{1/2}}+c_2\frac{\Gamma(\frac32)}{\lambda^{3/2}}+\ldots+c_{2n-2}\frac{\Gamma(n-\frac12)}{\lambda^{n-\frac12}}+O\left(\frac{1}{\lambda^{n+\frac12}}\right)$, $\lambda\to+\infty$

Доказательство:

$$\int_{-a}^{a}e^{-\lambda y^2}(c_0+c_1y+c_2y^2+\ldots+c_{2n-1}y^{2n-1}+\underline{O}(y^{2n}))\,dy=$$

$$=c_0\int_{-a}^{a}e^{-\lambda y^2}dy+c_2\int_{-a}^{a}e^{-\lambda y^2}y^2dy+\ldots+c_{2n-2}\int_{-a}^{a}e^{-\lambda y^2}y^{2n-2}dy+O(1)\int_{-a}^{a}e^{-\lambda y^2}y^{2n}dy$$

$$\int_{-a}^{a}e^{-\lambda y^2}y^{2k}dy=2\int_0^{+\infty}e^{-\lambda y^2}y^{2k}dy-\int_{|y|\geq a}e^{-\lambda y^2}y^{2k}dy\ominus$$

- $\xi=\lambda y^2$, $y=\sqrt{\frac{\xi}{\lambda}}$: $2\int_0^{+\infty}e^{-\lambda y^2}y^{2k}dy=2\int_0^{+\infty}e^{-\xi}\frac{\xi^k}{\lambda^k}\frac{d\xi}{2\sqrt{\xi\lambda}}=\left\|\ d\xi=2\lambda y\,dy,\ dy=\frac{d\xi}{2\lambda y}=\frac{d\xi}{2\sqrt{\xi\lambda}}\right\|=$
$=\frac{1}{\lambda^{k+\frac12}}\int_0^{+\infty}e^{-\xi}\xi^{k-\frac12}d\xi\equiv\frac{\Gamma(k+\frac12)}{\lambda^{k+\frac12}}$

- $\int_{|y|\geq a}e^{-\lambda y^2}y^{2k}dy=\int_{|y|\geq a}e^{-(\lambda-1)y^2}\cdot e^{-y^2}y^{2k}dy\leq e^{-(\lambda-1)a^2}\int_{|y|\geq a}e^{-y^2}y^{2k}dy=\underline{O}(e^{-\lambda a^2})$

$$\int_{-a}^{a}e^{-\lambda y^2}(c_0+c_1y+\ldots+c_{2n-1}y^{2n-1}+\underline{O}(y^{2n}))\,dy=c_0\left(\frac{\Gamma(\frac12)}{\lambda^{1/2}}+\underline{O}(e^{-\lambda a^2})\right)+c_2\left(\frac{\Gamma(3/2)}{\lambda^{3/2}}+\underline{O}(e^{-\lambda a^2})\right)+$$
$$+\ldots+c_{2n-2}\left(\frac{\Gamma(n-\frac12)}{\lambda^{n-\frac12}}+\underline{O}(e^{-\lambda a^2})\right)+\underline{O}(1)\left(\frac{\Gamma(n+\frac12)}{\lambda^{n+\frac12}}+\underline{O}(e^{-\lambda a^2})\right)=$$
$$=c_0\frac{\Gamma(\frac12)}{\lambda^{1/2}}+c_2\frac{\Gamma(3/2)}{\lambda^{3/2}}+\ldots+c_{2n-2}\frac{\Gamma(n-\frac12)}{\lambda^{n-1/2}}+\overbrace{\underline{O}(e^{-\lambda a^2})}^{=\underline{O}\left(\frac{1}{\lambda^{n+\frac12}}\right)}+\underline{O}\left(\frac{1}{\lambda^{n+\frac12}}\right)$$

$$\int_{-1}^{1}e^{-\lambda y^2}\varphi'(y)\,dy,\quad \varphi'(y)=\varphi'(0)+\frac{\varphi''(0)}{1!}y+\frac{\varphi'''(0)}{2!}y^2+\frac{\varphi^{(4)}(0)}{3!}y^3+\underline{O}(y^4)$$

$g^2(x)=x-\ln(x+1)$, $y=g(x)$, $x=\varphi(y)$

$\boxed{2g(x)\cdot g'(x)=\frac{x}{x+1};\quad 2yg'(x)=\frac{\varphi(y)}{\varphi(y)+1}}$ $\quad\varphi'(y)=\frac{1}{g'(x)}=2y\frac{\varphi(y)-1}{\varphi(y)}$;

1) $\varphi(y)\varphi'(y)=2y\varphi(y)-2y\longrightarrow\varphi'(y)\varphi'(y)-\varphi(y)\varphi''(y)=2\varphi(y)+2y\varphi'(y)+2$
$y=0\Rightarrow(\varphi'(0))^2=2\Rightarrow\varphi'(0)=\sqrt2$

2) $\varphi''(y)\varphi'(y)+\varphi'(y)\varphi''(y)+\varphi'(y)\varphi''(y)+\varphi(y)\varphi'''(y)=2\varphi'(y)+2\varphi'(y)+2y\varphi''(y)$
$3\varphi''(y)\varphi'(y)+\varphi(y)\varphi'''(y)=4\varphi'(y)+2y\varphi''(y)$;
$y=0\Rightarrow 3\varphi''(0)\sqrt2=4\sqrt2\Rightarrow\varphi''(0)=\frac43$

$\Gamma(\frac12)=\sqrt\pi$

$\Gamma(\frac32)=\frac12\Gamma(\frac12)=\frac{\sqrt\pi}{2}$

3) $3\varphi'''(y)\varphi'(y)+3\varphi''(y)\varphi''(y)+\varphi'(y)\varphi'''(y)+\varphi(y)\varphi^{(4)}(y)=4\varphi''(y)+2\varphi''(y)+2y\varphi'''(y)$
$4\varphi'''(y)\varphi'(y)+3(\varphi''(y))^2+\varphi(y)\varphi^{(4)}(y)=6\varphi''(y)+2y\varphi'''(y)$
$4\varphi'''(0)\sqrt2+3\cdot16/9=6\cdot4/3$; $\quad 4\sqrt2\varphi'''(0)=8-\frac{16}{3}\Rightarrow\varphi'''(0)=\frac{\sqrt2}{3}$

$$\varphi'(y)=\sqrt2+\frac43y+\frac{\sqrt2}{6}y^2+\frac{\varphi^{(4)}(0)}{3!}y^3+\underline{O}(y^4)$$

$$\int_{-1}^{1}e^{-\lambda y^2}\varphi'(y)\,dy=\sqrt2\frac{\Gamma(\frac12)}{\sqrt\lambda}+\frac{\sqrt2}{6}\frac{\Gamma(3/2)}{\lambda\sqrt\lambda}+O\left(\frac{1}{\lambda^{5/2}}\right)=\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}+\frac{\sqrt{2\pi}}{12}\cdot\frac{1}{\lambda\sqrt\lambda}+O\left(\frac{1}{\lambda^2\sqrt\lambda}\right)$$

$$\Gamma(\lambda+1)=\lambda^{\lambda+1}e^{-\lambda}\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt\lambda}+\frac{\sqrt{2\pi}}{12}\frac{1}{\lambda\sqrt\lambda}+\underbrace{O\left(\frac{1}{\lambda^2\sqrt\lambda}\right)+O(e^{-\lambda})}_{O\left(\frac{1}{\lambda^2\sqrt\lambda}\right)}\right)=\lambda^{\lambda+\frac12}e^{-\lambda}\sqrt{2\pi}\left(1+\underbrace{\frac{(1/12)}{\lambda}+O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)}_{O(1)}\right)$$

$$\lambda=n:\quad n!=\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\left(1+\underline{O}(1)\right)$$

5. Задача о наилучшем приближении в евклидовом пространстве. Общие ряды Фурье

E – евклидово пр-во, если $\forall f, g \in L \mapsto (f,g) \in \mathbb{R}$ ← скалярное произведение, такое что:

1) $(f,g) = (g,f)$ $\forall f, g \in L$ (симметричность)
2) $(\alpha f + \beta g, h) = \alpha (f,h) + \beta (g,h)$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (линейность по 1ому аргументу)
3) $(f,f) \geq 0$ $\forall f \in L$ и $(f,f) = 0 \Leftrightarrow f = \theta$ (положительная определенность)

Также скалярное произведение линейно по 2 аргументу и выполняется неравенство Коши-Буняковского: $(f,g)^2 \leq (f,f)\cdot(g,g)$ $\forall f, g \in L$.

Пример: • $C[a,b]$ с $(f,g) = \int_a^b f(x) g(x) dx$ – бесконечномерное E

$\tilde{E}$ – псевдоевклидово пр-во, если $\forall f, g \in L \mapsto (f,g) \in \mathbb{R}$ ← скалярное произведение, такое что:

1) и 2) из определения евклидова пр-ва;
3) $(f,f) \geq 0$ $\forall f \in L$ (неотрицательная определенность)

Пример: • $R[a,b]$ (интегр. по Риману) – бесконечномерное $\tilde{E}$

L – нормированное пр-во, если $\forall f \in L \mapsto \|f\| \in \mathbb{R}$ ← норма, такое что:

1) $\|f\| \geq 0$ $\forall f \in L$ и $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = \theta$, (положительная определенность)
2) $\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$ $\forall f \in L$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, (положительная однородность)
3) $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$ $\forall f \in L$, (нер-во Δ)

$\tilde{L}$ – почти нормированное пр-во, если $\forall f \in L \mapsto \|f\| \in \mathbb{R}$ ← полунорма, такое что:

2) и 3) из определения нормированного пр-ва;
1) $\|f\| \geq 0$ $\forall f \in L$ (неотрицательная определенность)

$E(\tilde{E}) \to L(\tilde{L})$: $\|f\| = \sqrt{(f,f)}$ и нер-во Коши-Буняковского $|(f,g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|$, $f, g \in E(\tilde{E})$

$f, g \in E(\tilde{E})$ ортогональны, если $(f,g) = 0$

$\psi_1 \ldots \psi_n \ldots \in E(\tilde{E})$ – ортонормированная система, если $(\psi_k, \psi_j) = 0$ $\forall k \neq j$, $\|\psi_k\| = 1$ $\forall k$

Пример ОНС: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}$ – тригонометрич. с-ма ф-ий (ТрСФ)

Рассмотрим произвольную ОНС $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $E(\tilde{E})$

Ряд Фурье для $f \in E(\tilde{E})$ по ОНС $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$: $\sum_{k=1}^{\infty} (f, \psi_k) \psi_k$, где $(f, \psi_k) = f_k$ ← коэффициент Фурье

Теорема 1:

[Среди всех сумм вида $\sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k$, где $c_k \in \mathbb{R}$ наименьшее отклонение от f по норме ($\|f-g\|$ – отклонение по норме) имеет n-я частичная сумма ряда Фурье $\sum_{k=1}^{n} f_k \cdot \psi_k$ элемента f, причем $\|\sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k - f\| = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2$ ← тождество Бесселя]

Доказательство:

$$\|\sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k - f\|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k - f, \sum_{l=1}^{n} c_l \psi_l - f\right) = \sum_{k,l=1}^{n} c_k c_l (\psi_k, \psi_l) - 2\sum_{k=1}^{n} c_k (f, \psi_k) + (f,f) = \{\{\psi_k\} - \text{ОНС}\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} c_k f_k + \sum_{k=1}^{n} f_k^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 + \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (c_k - f_k)^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 + \|f\|^2$$

$$\Rightarrow \|\sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k - f\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (c_k - f_k)^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 + \|f\|^2$$

Указанный квадрат отклонения является наименьшим при $c_k = f_k$

Теорема 2:

[Для $\forall$ ОНС $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty} \in E(\tilde{E})$ и $\forall f \in E(\tilde{E})$ справедливо неравенство Бесселя $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \leq \|f\|^2$]

Доказательство:

$\|f\|^2 \geq \sum_{k=1}^{n} f_k^2$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ частичные суммы огр. $\Rightarrow$ он сх-ся и его сумма $\leq \|f\|^2$.

6. Замкнутые и полные системы

Система ОНБ $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ **ЗАМКНУТА** в $E(\tilde{E})$, если
$\forall f\in E(\tilde{E})$, $\forall \varepsilon>0$ $\exists n\in\mathbb{N}$, $\exists c_1,\dots,c_n\in\mathbb{R}$: $\left\|\sum_{k=1}^{n} c_k\psi_k - f\right\|<\varepsilon$

Теорема 1:

[Если ОНС $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ замкнута в $E(\tilde{E})$, тогда $\forall f\in E(\tilde{E})$ нер-во Бесселя переходит в точное равенство: $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \|f\|^2$] равенство Парсеваля

Доказательство:

В силу замкнутости $\forall\varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbb{N}$, $\exists c_1\dots c_N\in\mathbb{R}$: $\left\|\sum_{k=1}^{N} c_k\psi_k - f\right\|^2<\varepsilon^2$

$\|f\|^2-\sum_{k=1}^{N} f_k^2 = \left\|\sum_{k=1}^{N} f_k\psi_k - f\right\| \leq \left\|\sum_{k=1}^{N} c_k\psi_k - f\right\|^2<\varepsilon^2$

Тогда для $\forall n\geq N$: $0\leq \|f\|^2-\sum_{k=1}^{n} f_k^2 \leq \|f\|^2-\sum_{k=1}^{N} f_k^2<\varepsilon^2$

Теорема 2:

[Если ОНС $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ замкнута в $E(\tilde{E})$, то для $\forall f\in E(\tilde{E})$ его ряд Фурье сходится к f по норме: $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k - f\right\|=0$]

Доказательство:

Тождество Бесселя: $\left\|\sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k - f\right\| = \|f\|^2-\sum_{k=1}^{n} f_k^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (по т. 1)

Система ОНБ $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ **ПОЛНА** в $E(\tilde{E})$, если из $(f,\psi_k)=0 \Rightarrow f=\theta$

Теорема 3:

[В E любая ОНС $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна]

Доказательство:

$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \|f\|^2$. Если f имеет только 0 коэф. Фурье (f_k), то $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2=0 \Rightarrow \|f\|=0 \Rightarrow f=0$

Теорема 4:

[Для $\forall$ полной ОНС $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}\subset E$ два различных элемента $f,g\in E$ не могут иметь одинаковые ряды Фурье.]

Доказательство:

$f,g\in E$: $f_k=g_k$ $\forall k$. Тогда $(f,\psi_k)=(g,\psi_k)$ $\forall k \Rightarrow (f-g,\psi_k)=0$ $\forall k \Rightarrow f-g=\theta$

7. Сходимость средних Чеза́ро для тригонометрического ряда Фурье

Рассмотрим ТРФ для $f(x)\in R[-\pi,\pi]$: $f_0\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(f_k'\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}+f_k''\frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\right)$

$f_0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt,\ f_k'=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos kt\,dt,\ f_k''=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin kt\,dt$

Введем новые коэффициенты:

$a_0=\frac{2f_0}{\sqrt{\pi}}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt,\ a_k=\frac{f_k'}{\sqrt{\pi}}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos kt\,dt,\ b_k=\frac{f_k''}{\sqrt{\pi}}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin kt\,dt$

Тогда ТРФ: $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$

Нер-во Бесселя: $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$, $a_k\to0,\ b_k\to0$ при $k\to\infty$

Рассмотрим $f(x)\in R[-\pi,\pi]$, $\exists f(-\pi+0), f(\pi-0)$, $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$

Перейдем от $f(x)$ к её периодическому продолжению $F(x)$:

- $F(x)=f(x),\ -\pi<x<\pi$
- $F(-\pi)=F(\pi)=\frac{1}{2}(f(-\pi+0)+f(\pi-0))$
- $F(x+2\pi)=F(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$

$f(x)$ - 2π периодическая ф-ия:

$$\int_{-\pi-x}^{\pi-x}f(t)dt=\int_{-\pi-x}^{-\pi}f(t)dt+\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt+\int_{\pi}^{\pi-x}f(t)dt=\int_{\pi-x}^{\pi}f(t-2\pi)dt+\int_{\pi}^{\pi-x}f(t)dt+\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt$$

$\int_{-\pi}^{\pi}f(t+x)dt=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt\ \forall x\in\mathbb{R}$ для 2π-периодической ф-ии

Интегральное представление для частичных сумм ТРФ

$$S_n(x,f)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}f(y)dy+\frac{1}{\pi}\cdot\left(\cos kx\cdot\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\cos ky\,dy+\sin kx\cdot\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\sin ky\,dy\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(y-x)\right)dy=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}f(x+t)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right)dt$$

Т.к $\left(\frac{1}{2}+\cos t+\cos 2t+\ldots+\cos nt\right)\cdot2\sin\frac{t}{2}=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t$

То $S_n(x,f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt=\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)D_n(t)dt$, где $D_n(t)=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\pi\sin\frac{t}{2}}$

ядро Дирихле

Лемма 1: $\int_{-\pi}^{\pi}D_n(t)dt=1\ (\forall n\in\mathbb{N})$

Рассмотрим ТРФ для $f(x)\equiv1$. Она ортогональна $\sin kx$ и $\cos kx$

$\Rightarrow a_k=b_k=0\ \forall k\in\mathbb{N}\Rightarrow S_n(x,f)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\underbrace{(a_k\cos kx+b_k\sin kx)}_{0}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}1\,dt=1$

$S_n(x,f)=\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot D_n(t)dt=1$

Лемма 2: $S_n(x,f)-f(x)=\int_{-\pi}^{\pi}D_n(t)\left(f(x+t)-f(x)\right)dt,\ \forall n\in\mathbb{N}$

$\int_{-\pi}^{\pi}D_n(t)\cdot f(x+t)dt-\int_{-\pi}^{\pi}D_n(t)f(x)dt=S_n(x,f)-f(x)\cdot\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}D_n(t)dt}_{=1}$

Метод Чезарро (метод средних арифметических)

$\lim_{n\to\infty}\frac{S_1+\ldots+S_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\sigma_n=S\ \Rightarrow\ \sum a_n\overset{(c)}{=}S$, где S_i - частичные суммы

Применим этот метод к ТРФ

$S_0(x,f)=\frac{a_0}{2},\quad S_n(x,f)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),\ n\ge1$

$$\sigma_n(x,f)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}S_k(x,f)=\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\cdot\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\right)dt$$

Т.к $\left(\sin\frac{1}{2}t+\sin\frac{3}{2}t+\ldots+\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)t\right)\cdot2\sin\frac{t}{2}=1-\cos nt=2\sin^2\frac{nt}{2}$

То $\sigma_n(x,f)=\frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}}dt=\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\Phi_n(t)dt$, где $\Phi_n(t)=\frac{1}{2\pi n}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2$

ядро Фейе́ра

Лемма 3: Ядро Фейера обладает свойствами:
1) $\Phi_n(t)$ неотрицательно и чётно на $[-\pi,\pi]$
2) для всех $n\in\mathbb{N}$: $\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)dt=1$
3) для $\forall\delta\in(0,\pi)$: $\int_{-\pi}^{-\delta}\Phi_n(t)dt=\int_{\delta}^{\pi}\Phi_n(t)dt\to0$ при $n\to\infty$

1) Очевидно из вида $\Phi_n(t)$
2) Рассмотрим ТРФ для $f(x)\equiv1$. Тогда $S_n(x,f)=1$ $\forall n\in\mathbb{N}$ (см. лемма 1)
$\Rightarrow\sigma_n(x,f)=1$ $\forall n\in\mathbb{N}$. $\sigma_n(x,f)=\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\Phi_n(t)\,dt=1$
3) Если $t\in[\delta,\pi]$, то $\Phi_n(t)\le\frac{1}{2\pi n}\left(\frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}\right)^2\to0$ при $n\to\infty$

Лемма 4: $\sigma_n(x,f)-f(x)=\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)\left(f(x+t)-f(t)\right)dt$, $\forall n\in\mathbb{N}$

Теорема 1: Фейера
[Если ф-ия $f(x)\in C[-\pi,\pi]$ и $f(-\pi)=f(\pi)$, то $\sigma_n(x,f)\rightrightarrows f(x)$ на $[-\pi,\pi]$]

Доказательство:
1) продолжим $f(x)$ периодически на $\mathbb{R}$. $f(\pi)=f(-\pi)\Rightarrow$ продолжение $\in C(\mathbb{R})$ и равномерно непрерывно на $\mathbb{R}$: $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta\in(0,\pi)$: $\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall t\in[-\delta,\delta]$: $|f(x+t)-f(t)|<\frac{\varepsilon}{2}$
2) $\sigma_n(x,f)-f(x)=\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)(f(t+x)-f(x))dt=\underbrace{\int_{-\delta}^{\delta}\Phi_n(t)(f(t+x)-f(x))\,dt}_{I_1}+\underbrace{\int_{\delta\le|t|\le\pi}\Phi_n(t)(f(t+x)-f(x))\,dt}_{I_2}$
3) $|I_1|\le\int_{-\delta}^{\delta}\Phi_n(t)|f(t+x)-f(x)|dt\le\frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta}\Phi_n(t)\,dt<\frac{\varepsilon}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)\,dt=\frac{\varepsilon}{2}$
4) $|I_2|\le\int_{\delta\le|t|\le\pi}\Phi_n(t)|f(x+t)-f(t)|dt\le\{f(x)\le M\}\le2M\int_{\delta\le|t|\le\pi}\Phi_n(t)dt=4M\underbrace{\int_{\delta}^{\pi}\Phi_n(t)dt}_{\xrightarrow{n\to\infty}0}<\frac{\varepsilon}{2}$
при $n\ge N$, если N достаточно большое
Итак, $|\sigma_n(x,f)-f(x)|<\varepsilon$ при $n\ge N$ для всех $x\in\mathbb{R}$

Теорема 2:
[Пусть $f(x)\in R[-\pi,\pi]$ и 2π-периодически продолжена на $\mathbb{R}$. Пусть в $x_0\in\mathbb{R}$ существуют предельные значения $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$.
Тогда $\sigma_n(x_0,f)\to\frac{1}{2}(f(x_0-0)+f(x_0+0))$ при $n\to\infty$]

Доказательство:
1. Положим $\tilde{f}(x_0)=\frac{1}{2}(f(x_0-0)+f(x_0+0))$.
Заметим, что: $f(x)$ ограничена на $\mathbb{R}$, т.е $|f(x)|\le M$ $\forall x\in\mathbb{R}$
и $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$: $\forall t\in(0,\delta)\Rightarrow|f(x_0+t)-f(x_0+0)|<\varepsilon/4$, $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$: $\forall t\in(-\delta,0)\Rightarrow|f(x_0+t)-f(x_0-0)|<\frac{\varepsilon}{4}$
2. $\sigma_n(x_0,f)-\tilde{f}(x_0)=\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)(f(x_0+t)-\tilde{f}(x_0))\,dt=\underbrace{\int_{\delta\le|t|\le\pi}\Phi_n(t)(f(x_0+t)-\tilde{f}(x_0))dt}_{I_1}+\int_0^{\delta}\Phi_n(t)f(x_0+t)dt+$
$+\int_{-\delta}^{0}\Phi_n(t)f(x_0+t)dt-\frac{1}{2}(f(x_0-0)+f(x_0+0))\cdot2\int_0^{\delta}\Phi_n(t)dt=$
$=I_1+\underbrace{\int_0^{\delta}\Phi_n(t)(f(x_0+t)-f(x_0+0))dt}_{I_2}+\underbrace{\int_{-\delta}^{0}\Phi_n(t)\left(f(x_0+t)-f(x_0-0)\right)dt}_{I_3}=I_1+I_2+I_3$
3. $|I_2|\le\int_0^{\delta}\Phi_n(t)|f(x_0+t)-f(x_0+0)|\,dt\le\frac{\varepsilon}{4}\int_0^{\delta}\Phi_n(t)dt<\frac{\varepsilon}{4}$
$|I_3|\le\int_{-\delta}^{0}\Phi_n(t)|f(x_0+t)-f(x_0-0)|\,dt\le\frac{\varepsilon}{4}\int_{-\delta}^{0}\Phi_n(t)\,dt<\frac{\varepsilon}{4}$
$|I_1|\le\int_{\delta\le|t|\le\pi}\Phi_n(t)\,|f(x_0+t)-\tilde{f}(x_0)|\,dt\le4M\underbrace{\int_{\delta}^{\pi}\Phi_n(t)dt}_{\xrightarrow{n\to\infty}0}<\frac{\varepsilon}{2}$ при $n\ge N$

Таким образом, $|\sigma_n(x_0,f)-\tilde{f}(x_0)|<\varepsilon$, если $n\ge N$, где N - достаточно велико

8. Замкнутость тригонометрической системы

Тригонометрический мн-н — $\forall$ конечная линейная комбинация ф-ий с-мы

(*) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}$ в пр-ве $R[-\pi,\pi]$

Теорема 1:

[Система (*) замкнута в $R[-\pi,\pi]$, т.е $\forall f(x)\in R[-\pi,\pi]$ и $\forall \varepsilon>0$ $\exists$ тригонометрический мн-н $T(x)$: $\|f(x)-T(x)\|<\varepsilon$]

Доказательство:

Для $\forall f(x)\in R[-\pi,\pi]$ и $\forall\varepsilon>0$:

1. Построим кусочно-постоянную ф-ю $f_1(x)$, что $\|f(x)-f_1(x)\|<\frac{\varepsilon}{3}$

$f(x)$ интегрируема $\Rightarrow$ ограничена, т.е $\exists M$: $|f(x)|\le M$ $\forall x\in[-\pi,\pi]$

По критерию Дарбу $\forall\varepsilon>0$ $\exists$ разбиение $-\pi=x_0<x_1<\dots<x_n=\pi$ т.ч:

$0\le \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx-\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k-x_{k-1})<\varepsilon_1=\varepsilon^2/18M$, где $m_k=\inf_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x)$

Введем кусочно-постоянную ф-ю: $f_1(x)=\begin{cases} m_1, & x\in[x_0,x_1] \\ m_k, & x\in(x_{k-1},x_k],\ \forall k=\overline{2,n}\end{cases}$

Тогда $0\le\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx-\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)dx<\varepsilon_1=\varepsilon^2/18M$

Таким образом: $\|f(x)-f_1(x)\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-f_1(x))^2dx\le\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-f_1(x))(|f(x)|+|f_1(x)|)dx\le$
$\le 2M\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-f_1(x))dx<\varepsilon^2/9$

2. Построим $g(x)\in C[-\pi,\pi]$, т.ч $g(-\pi)=g(\pi)$ и $\|f_1(x)-g(x)\|<\varepsilon/3$

Модифицируем $f_1(x)$ в точках разрыва и в т. $x=\pi$, если $f_1(\pi)\ne f_1(-\pi)$

$x=x_k$: $f_1(x)=\begin{cases} m_k, & x\le x_k\\ m_{k+1}, & x>x_k\end{cases} \longrightarrow g(x)=\begin{cases} m_k & x\le x_k\\ m_k+\frac{m_{k+1}-m_k}{h}(x-x_k) & x\in(x_k,x_k+h)\\ m_{k+1} & x\ge x_k+h\end{cases}$

$m_k\ne m_{k+1}$

Тогда $\int_{x_k}^{x_k+h}|g(x)-f_1(x)|dx\le\frac{h}{2}|m_{k+1}-m_k|\le Mh$

$\Rightarrow\int_{x_k}^{x_k+h}(g(x)-f_1(x))^2dx\le 2M\cdot Mh=2M^2h$

$\|g(x)-f_1(x)\|^2\le 2nM^2h<\varepsilon^2/9$ (n – максимально возможное число точек разрыва)

за счёт выбора h

3. Укажем $T(x)$ – тригоном. мн-н т. что $\|g(x)-T(x)\|<\varepsilon/3$

для $g(x)\in C[-\pi,\pi]$, $g(-\pi)=g(\pi)$ возьмём как $T(x)$ средние Чезаро $\sigma_n(x,g)$ с достаточно большим n

Равномерная сходимость средних $\sigma_n(x,g)$ к $g(x)$ на $[-\pi,\pi]$ обеспечивает их сходимость в среднем $\Rightarrow$ $\|g(x)-T(x)\|<\varepsilon/3$

Следствия замкнутости ТРС в $R[-\pi,\pi]$

1. (*) замкнута в пр-ве $C[-\pi,\pi]$ и в пространстве кусочно-непр. ф-ий $E_0[-\pi,\pi]$.
2. (*) полна в $C[-\pi,\pi]$ и в $E_0[-\pi,\pi]$
3. Система $\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\dots$ полна в $E_0[0,\pi]$ и в $E_0[-\pi,0]$
4. Система $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}$ полна в $E_0[0,\pi]$ и в $E_0[-\pi,0]$

Доказательство 3:

Пусть $f(x)\in E_0[0,\pi]$ ортогональна всем ф-иям 3 $\Rightarrow\int_0^{\pi}f(x)\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}dx=0$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Положим $f(x)$ нечетным образом на $[-\pi,0]$ и, если нужно, $f(0)=0$.

Тогда $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}dx=0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ и $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}dx=0$, $\forall n=\mathbb{N}\cup\{0\}$ (в силу нечетности $f(x)$)

$\Rightarrow f(x)\in E_0[-\pi,\pi]$ ортогональна (*) и в силу её полноты $f(x)\equiv0$.

5. Для $\forall f(x) \in R[-\pi,\pi]$ равенство Парсеваля: $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$

6. ТРФ $\forall f(x) \in R[-\pi,\pi]$ сходится к $f(x)$ в среднем

7. ТРФ $\forall f(x) \in R[-\pi,\pi]$ можно почленно интегрировать по $[-\pi,\pi]$ или части.

8. Если $f(x), g(x) \in E_0[-\pi,\pi]$ имеют одинак. ряды Фурье $\Rightarrow f(x) \equiv g(x)$

9. Если ТРФ $f(x) \in E_0[-\pi,\pi]$ сх-ся равномерно на $[-\pi,\pi]$ или $[a,b] \subset [-\pi,\pi] \Rightarrow$ ТРФ сходится именно к $f(x)$

Доказательство 9:

$S_n(x,f) \rightrightarrows g(x) \Rightarrow \|S_n(x,f)-g(x)\| \to 0$. В силу 6 $\|S_n(x,f)-f(x)\| \to 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \|f(x)-g(x)\| \to 0 \Rightarrow f(x) \equiv g(x)$

10. Теорема Вейерштрасса

[Для $\forall$ непрерывной на $[a,b]$ ф-ии $f(x)$ и $\forall \varepsilon>0 \ \exists P(x): |f(x)-P(x)|<\varepsilon \ \forall x \in [a,b]$]

Доказательство:

$x = a + \frac{b-a}{\pi}t \Rightarrow f(x) = f(a+\frac{b-a}{\pi}t) = g(t)$, где $g(t) \in C[0,\pi]$

Продолжим $g(t)$ четным образом на $[-\pi,0]$: $g(t) \in C[-\pi,\pi]$, $g(-\pi)=g(\pi)$
Возьмем $T(x) = \sigma_n(t,g)$ с большим n: $|g(t)-T(t)| < \varepsilon/2 \ \forall t \in [-\pi,\pi]$
Разложим $T(x)$ в ряд Тейлора (сходится при $\forall t \in \mathbb{R}$) и выберем его частичную сумму $Q_n(t)$: $|T(t)-Q_n(t)| < \varepsilon/2$, $\forall t \in [-\pi,\pi]$
$\Rightarrow |g(t)-Q_n(t)| < \varepsilon/2 \ \forall t \in [-\pi,\pi] \Rightarrow \left|f(x) - Q_n\left(\frac{\pi}{b-a}(x-a)\right)\right| < \varepsilon \ \forall x \in [a,b]$
$P(x) = Q_n\left((x-a)\frac{\pi}{(b-a)}\right)$ – многочлен

9. Простейшие условия равномерной сходимости ТРФ

$f(x)$ имеет на $[a,b]$ кусочно-непрерывную производную, если:

- $\exists f'(x) \in C(a,b)$ кроме, быть может, конечного числа точек $x_k \in (a,b)$, в которых $\exists f'(x_k \pm 0)$
- $\exists f'(a+0)$ и $f'(b-a)$

Считаем, что в x_k: $f'(x_k) = \frac{1}{2}\left(f'(x_k+0) + f'(x_k-0)\right)$

Теорема 1:

$f(x) \in C[-\pi,\pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$ и $f(x)$ имеет кусочно-непрерывную производную на $[-\pi,\pi]$. Тогда ТРФ для $f(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно на $[-\pi,\pi]$ абсолютно, т.е $\frac{|a_0|}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(|a_n \cos nx| + |b_n \sin nx|\right)$ равномерно сх-ся на $[-\pi,\pi]$ $(*)$

Доказательство:

Рассмотрим: $\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,dx$, $\beta_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx$

Если $x_1 < x_2 < \ldots < x_{m-1}$ – точки разрыва $f'(x)$, $x_0 = -\pi$, $x_m = \pi$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}\cos nx\,df(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m}\left(f(x_k)\cos nx_k - f(x_{k-1})\cos nx_{k-1} + n\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\sin nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{n}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx + \left(f(x_1)\cos nx_1 - f(x_0)\cos nx_0 + f(x_2)\cos nx_2 - f(x_1)\cos nx_1 + \ldots\right.$$

$$\left.+ f(x_m)\cos nx_m - f(x_{m-1})\cos nx_{m-1}\right) = nb_n - f(-\pi)\cos n\pi + f(\pi)\cos n\pi = nb_n$$

Аналогично: $\beta_n = -na_n$

Получим: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(|a_n| + |b_n|\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|\alpha_n|}{n} + \frac{|\beta_n|}{n}\right) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}|\alpha_n|^2 + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2}|\beta_n|^2 + \frac{1}{2n^2}\right) =$

$= \frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2\right) + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty$

сх-ся в силу нер-ва Бесселя

$\Rightarrow$ сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(|a_n| + |b_n|\right)$ по пр-ку Вейерштрасса

$\Rightarrow$ сх-ся ряд $(*)$ $\Rightarrow$ ТРФ сходится равномерно к разлагаемой ф-ии $f(x)$

Теорема 2 (почленное дифф-ие ТРФ)

Пусть $f(x), f'(x), \ldots, f^{(m)}(x) \in C[-\pi,\pi]$ и $f^{(k)}(-\pi) = f^{(k)}(\pi)$, $k = \overline{0,m}$

Пусть $f^{(m)}(x)$ имеет кусочно-непр. производную на $[-\pi,\pi]$.

Тогда ТРФ для $f(x)$ можно m раз дифф-ть на $[-\pi,\pi]$.

Доказательство:

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx + b_n \sin nx\right)$

$f^{(k)}(x) \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^k\left(a_n\cos\left(nx - \frac{\pi k}{2}\right) + b_n\sin\left(nx - \frac{\pi k}{2}\right)\right)$, $k = \overline{1,n}$ $\quad (*)$

$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{(m+1)}(x)\cos nx\,dx$, $\beta_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{(m+1)}(x)\sin nx\,dx$

Проведем $m+1$ раз интегр. по частям: $|\alpha_n| + |\beta_n| = n^{m+1}\left(|a_n| + |b_n|\right)$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^m\left(|a_n| + |b_n|\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|\alpha_n|}{n} + \frac{|\beta_n|}{n}\right) < \infty$

Этот ряд мажорирует $(*)$ $\Rightarrow$ $(*) < \infty, k = m$ $\Rightarrow$ $f^{(k)}(x) = (*)$ $\Rightarrow$ почленное дифф-ие возможно

Теорема 3: (оценка скорости сх-ти ТРФ)

Пусть выполнены все условия теоремы 1
$f(x) \in C[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$ и $f(x)$ имеет кусочно-непрерывную производную на $[-\pi,\pi]$.
Тогда справедлива оценка: $|S_n(x,f)-f(x)| \leq \frac{\gamma_n}{\sqrt{n}}$, $\forall x \in [-\pi,\pi]$, где $\gamma_n \to 0$ при $n\to\infty$

Доказательство:

Нер-во Коши Буняковского: $\sum\limits_{n=1}^{N} |c_n d_n| \leq \left(\sum\limits_{n=1}^{N} c_n^2\right)^{1/2} \left(\sum\limits_{n=1}^{N} d_n^2\right)^{1/2}$

$N\to\infty$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n d_n| \leq \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2\right)^{1/2} \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n^2\right)^{1/2}$

$$|S_n(x,f)-f(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k \sin kx)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty}(|a_k|+|b_k|) = \sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{|\alpha_k|}{n}+\frac{|\beta_k|}{n}\right) \leq$$

$$\leq \left(\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\alpha_k^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\beta_k^2\right)^{1/2}\right)\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2} = \gamma_n \left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2}$$

нер-во Бесселя

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\int_{k-1}^{k} dx \leq \sum_{k=n+1}^{\infty}\int_{k-1}^{k}\frac{dx}{x^2} = \int_{n}^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{n}$$

в силу монотонного убывания ф-ии $\frac{1}{k^2}$ на $(0,+\infty)$

$$\Rightarrow |S_n(x,f)-f(x)| \leq \frac{\gamma_n}{\sqrt{n}} \quad \forall x \in [-\pi,\pi]$$

10. Уточнение условий сходимости ТРФ (принцип локализации)

Рассмотрим $F(x,t)=f(x+t)g(t)$, где:
- $f(t)$ – 2π-периодическая ф-ция и $f(t)\in R[-\pi,\pi]$
- $g(t)\in R[-\pi,\pi]$

Лемма 1: 1) $I(x)=\int_{-\pi}^{\pi}F(x,t)dt\in C[-\pi,\pi]$ (и на $\mathbb{R}$)

2) $a_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x,t)\cos nt\,dt$, $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x,t)\sin nt\,dt$ равномерно стремится к нулю на $[-\pi,\pi]$

Доказательство:

1) $I(x+h)-I(x)=\int_{-\pi}^{\pi}\big(f(x+h+t)-f(x+t)\big)g(t)dt$

$|I(x+h)-I(x)|\le \underset{\uparrow\, g(t)\in R[-\pi,\pi]\Rightarrow g(t)\le M}{M}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+h+t)-f(x+t)|dt = M\int_{-\pi}^{\pi}|f(t+h)-f(t)|dt$

Выберем $T(x)$: $\|f(t)-T(t)\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)-T(t)|^2dt<\frac{\varepsilon^2}{18\pi M^2}$

$\Rightarrow$ Нер-во Коши-Буняковского: $\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)-T(t)|dt\le\|f(t)-T(t)\|\cdot\sqrt{2\pi}<\frac{\varepsilon}{3M}$

$\int_{-\pi}^{\pi}|f(t+h)-f(t)|dt\le\int_{-\pi}^{\pi}|f(t+h)-T(t+h)|dt+\int_{-\pi}^{\pi}|T(t+h)-T(t)|dt+\int_{-\pi}^{\pi}|T(t)-f(t)|<$

$<\frac{2\varepsilon}{3M}+\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}|T(h+t)-T(t)|dt}_{<\frac{\varepsilon}{3M}}$ ← $\exists\delta>0\ \forall h:|h|<\delta$ в силу равн. непр-ти $T(t)$ на $\mathbb{R}$ $<\varepsilon/M$

$\Rightarrow |I(x+h)-I(x)|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$

2) Нер-во Парсеваля: $\overbrace{\frac{a_0^2(x)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2(x)+b_n^2(x))}^{\text{неотриц. слагаемые}}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F^2(x,t)dt$ (*)

$a_n(x)$, $b_n(x)$ и $\int_{-\pi}^{\pi}F^2(x,t)dt=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x+t)g^2(t)dt$ непрерывны по $x\in[-\pi,\pi]$

По признаку Дини ряд в (*) сходится равномерно на $[-\pi,\pi]$

Т.е $a_n(x), b_n(x)\rightrightarrows 0$ на $[-\pi,\pi]$

Лемма 2: $\forall\delta\in(0,\pi)$ и $\forall$ константы A справедливы:
- $S_n(x,f)=\int_{-\delta}^{\delta}f(x+t)D_n(t)dt+r_n(x)$, где $r_n(x)\rightrightarrows 0$
- $S_n(x,f)-f(x)=\int_{-\delta}^{\delta}(f(x+t)-f(x))D_n(t)dt+R_n(x)$, где $R_n(x)\rightrightarrows 0$
- $S_n(x_0,f)-A=\int_{-\delta}^{\delta}(f(x_0+t)-A)D_n(t)dt+\tilde{R}_n$, где $\tilde{R}_n\to 0$

Доказательство:
- $S_n(x,f)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)D_n(t)dt=\int_{-\delta}^{\delta}f(x+t)D_n(t)dt+\int_{\delta\le|t|\le\pi}f(x+t)\frac{1}{2\pi\sin\frac{t}{2}}\cdot\sin(n+\frac{1}{2})t\,dt=$
$=\int_{-\delta}^{\delta}f(x+t)D_n(t)dt+r_n(t)$

Тогда $r_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)g(t)\sin(n+\frac{1}{2})dt$, где $g(t)=\begin{cases}\frac{1}{2\sin t/2}, & \delta\le|t|\le\pi\\ 0, & -\delta<t<\delta\end{cases}\in R[-\pi,\pi]$

$\Rightarrow r_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)g(t)\cos\frac{t}{2}\sin nt\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)g(t)\sin\frac{t}{2}\cos nt\,dt\rightrightarrows 0$ (по лемме 1)

при $n\to\infty$ на $[-\pi,\pi]$

- $S_n(x,f)-f(x)=\int_{-\pi}^{\pi}(f(x+t)-f(x))D_n(t)dt=\int_{-\delta}^{\delta}(f(x+t)-f(x))D_n(t)dt+r_n(x)-f(x)\int_{\delta\le|t|\le\pi}D_n(t)dt$

$r_n(x)\rightrightarrows 0$ и $\left|f(x)\int_{\delta\le|t|\le\pi}D_n(t)dt\right|\le M\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot g(t)\sin(n+\frac{1}{2})t\,dt\right|\xrightarrow{n\to\infty}0$ ($\rightrightarrows 0$ на $[-\pi,\pi]$)

Теорема 1 (принцип локализации Римана):

[Сходимость/расходимость ТРФ $f(x)$ $(f(x)\in R(X))$ в точке/мн-ве зависит только от поведения $f(x)$ в сколь угодно малой окр-ти этой точки]

Теорема 2 (уточненный принцип локализации Римана)

[Если 2π-периодическая $f(x)\in R[-\pi,\pi]$ тождественно равна нулю на $[a,b]\subset[-\pi,\pi]$ то для $\forall$ достаточно малого $\delta>0$ $S_n(x,f)\rightrightarrows f(x)\equiv 0$ на $[a+\delta, b-\delta]$]

10. Уточнение условий сходимости ТРФ (класс Гёльдера)

$f(x) \in C[a,b]$. Модуль непр-ти $\omega(\delta, f) = \sup\limits_{x, x+t \in [a,b],\ |t| \le \delta} |f(x+t) - f(x)| \quad \forall \delta > 0$

Свойства $\omega(\delta, f)$:

- точная верхняя грань достигается (т-ма Вейерштрасса)
- если $\delta_1 < \delta_2 \Rightarrow \omega(\delta_1, f) \le \omega(\delta_2, f)$
- $\delta \to 0+0: \omega(\delta, f) \to 0$ (т-ма Кантора)
- $f(x)$ дифф-ма и $f'(x)$ ограничена, то с $M > 0$: $\omega(\delta, f) \le M\delta,\ \forall \delta > 0$

(т-ма Лагранжа: $f(x+t) - f(x) = f'(\xi)t \Rightarrow |f(x+t) - f(t)| \le Mt$)

$f(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\alpha \in (0, 1]$ на $[a, b]$, если с некоторой $M > 0$: $\omega(\delta, f) \le M\delta^\alpha,\ \forall \delta > 0$

Обозначение: $f(x) \in C^\alpha[a, b]$

Замечание:
1. $f(x) \in C^\alpha[a,b]$: $|f(x+t) - f(x)| \le M|t|^\alpha,\ \forall x, x+t \in [a,b]$
2. $\alpha = 1$: условие Липшица
3. $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1],\ \alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow C^{\alpha_2}[a,b] \subset C^{\alpha_1}[a,b]$

Теорема 1:

[$f(x) \in C^\alpha[-\pi, \pi]$, $0 < \alpha \le 1$ и $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда ТРФ $f(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно на $[-\pi, \pi]$]

Доказательство:

Продолжим $f(x)$ 2π-периодически на $\mathbb{R}$. По лемме 2:

$$S_n(x, f) - f(x) = \int_{-\delta}^{\delta} (f(x+t) - f(x)) D_n(t)\,dt + R_n(t), \quad R_n(t) \rightrightarrows 0 \text{ на } [-\pi, \pi]$$

$$\left|\int_{-\delta}^{\delta} (f(x+t) - f(x)) D_n(t)\,dt\right| \le \int_{-\delta}^{\delta} |f(x+t) - f(t)|\,|D_n(t)|\,dt \le M\int_{-\delta}^{\delta} |t|^\alpha \frac{1}{2\pi|\sin\frac{t}{2}|}\,dt = \frac{M}{\pi}\int_0^\delta \frac{t^\alpha}{\sin t/2}\,dt$$

чётная ф-ия

$\sin\left(\frac{t}{2}\right) \ge \frac{t}{\pi}$ при $t \in (0, \pi]$, то $\left|\int_{-\delta}^{\delta} (f(x+t) - f(x)) D_n(t)\,dt\right| \le M\int_0^\delta t^{\alpha - 1}\,dt = \frac{M}{\alpha}\delta^\alpha$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: $\frac{M}{\alpha}\delta^\alpha < \frac{\varepsilon}{2}$, $\exists N: \forall n \ge N, \forall x \in [-\pi, \pi]$: $|R_n(x)| < \varepsilon/2$ – в силу $R_n(x) \rightrightarrows 0$

$\Rightarrow |S_n(x, f) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \ge N\ \forall x \in [-\pi, \pi]$

Теорема 2:

[$\exists$ 2π-периодическая $f(x) \in R[-\pi, \pi]$. Для $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$: $f(x) \in C^\alpha[a, b]$, $0 < \alpha < 1$. $\forall \delta \in (0, \frac{b-a}{2})$ ТРФ ф-ии $f(x)$ сходится равномерно к $f(x)$ на $[a+\delta, b-\delta]$.]

Доказательство:

аналогично теореме 1.

$f(x)$ удовлетворяет в x_0 справа/слева условию Гёльдера с $\alpha \in (0, 1]$, если:
- $\exists\ f(x_0+0) / f(x_0-0)$
- $\forall \delta > 0$: $|f(x_0+t) - f(x_0+0)| \le Mt^\alpha,\ \forall t \in (0, \delta)$, $|f(x_0-t) - f(x_0-0)| \le Mt^\alpha,\ \forall t \in (0, \delta)$

Теорема 3:

[$\exists$ 2π-периодическая ф-ия $f(x) \in R[-\pi,\pi]$ в x_0: удовл. условию Гёльдера справа с $\alpha_1 \in (0,1]$ и слева с $\alpha_2 \in (0,1]$. Тогда ТРФ $f(x)$ сходится в x_0 к $\tilde{f}(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0+0)+f(x_0-0))$]

Доказательство:

$|f(x_0+t)-f(x_0+0)| \le M_1 t^{\alpha_1}$, $\forall t \in (0,\delta_1)$; $|f(x_0-t)-f(x_0-0)| \le M_2 t^{\alpha_2}$, $\forall t \in (-\delta_2, 0)$

Если $M = \max(M_1, M_2)$, $\alpha = \min(\alpha_1,\alpha_2)$, $\delta = \min(\delta_1,\delta_2)$:

$|f(x_0+t)-f(x_0+0)| \le Mt^\alpha$, $\forall t \in (0,\delta)$; $|f(x_0-t)-f(x_0-0)| \le Mt^\alpha$, $\forall t \in (-\delta, 0)$

В силу леммы 2: ($\tilde{R}_n \to 0$)

$$S_n(x_0,f)-f(x) = \int_{-\delta}^{\delta}(f(x_0+t)-\tilde{f}(x_0))D_n(t)\,dt + \tilde{R}_n = \int_0^\delta f(x_0+t)D_n(t)\,dt +$$
$$+\int_{-\delta}^0 f(x_0+t)D_n(t)\,dt - \int_0^\delta f(x_0+0)D_n(t)\,dt - \int_{-\delta}^0 f(x_0-0)D_n(t)\,dt + \tilde{R}_n =$$
$$= \int_0^\delta (f(x_0+t)-f(x_0+0))D_n(t)\,dt + \int_{-\delta}^0 (f(x_0+t)-f(x_0+0))D_n(t)\,dt + \tilde{R}_n$$

$$\left|\int_0^\delta (f(x_0+t)-f(x_0+0))D_n(t)\,dt\right| \le \int_0^\delta Mt^\alpha \frac{dt}{2\pi|\sin\frac{t}{2}|} \le \frac{M}{2}\int_0^\delta t^{\alpha-1}\,dt = \frac{M}{2\alpha}\delta^\alpha$$

$$\left|\int_{-\delta}^0 (f(x_0+t)-f(x_0-0))D_n(t)\,dt\right| \le \int_{-\delta}^0 M|t|^\alpha \frac{dt}{2\pi|\sin\frac{t}{2}|} \le \frac{M}{2}\int_0^\delta t^{\alpha-1}\,dt = \frac{M}{2\alpha}\delta^\alpha$$

$\tilde{R}_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: $\frac{M}{\alpha}\delta^\alpha < \frac{\varepsilon}{2}$ $\exists N, \forall n \ge N$: $|\tilde{R}_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n \ge N$: $|S_n(x_0,f) - \tilde{f}(x_0)| < \varepsilon$

11. Интеграл Фурье

Рассмотрим $f(x)$ на $\mathbb{R}$, $f(x)\in R([a,b])$, $\forall [a,b]\subset R$ и $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$ – сх-ся
$f(x)\in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$

Ф-ия $\hat{f}(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ixy}dx$ – преобразование Фурье ф-ии $f(x)$

Теорема 1:

$f(x)\in L_1(\mathbb{R})$, тогда:
- $\hat{f}(y)$ (образ Фурье) определен для $\forall y\in\mathbb{R}$
- $\hat{f}(y)\in C(\mathbb{R})$
- $\lim\limits_{|y|\to\infty}\hat{f}(y)=0$

Доказательство:

1) $|f(x)e^{ixy}|=|f(x)| \Rightarrow \hat{f}(y)$ определена для $\forall y\in\mathbb{R}$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ixy}dx$ равномерно сходится на $\mathbb{R}$ (т-ма Вейерштрасса)

2) $I_n(y)=\int_{-n}^{n} f(x)e^{ixy}dx \Rightarrow |I_n(y_0+h)-I_n(y_0)|\le \int_{-n}^{n}|f(x)||e^{ix(y_0+h)}-e^{ixy_0}|dx=$
$=\int_{-n}^{n}|f(x)|\cdot|\underbrace{e^{ixy_0}}_{=1}(e^{ixh}-1)|dx\le\{|e^{it}-1|\le 2|\sin\frac{t}{2}|\le|t|\}\le\int_{-n}^{n}|f(x)||xh|dx\le$
$\le nh\int_{-n}^{n}|f(x)|dx\le nh\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx \Rightarrow I_n(y)\in C(\mathbb{R})$ для каждого n
$I_n(y)\rightrightarrows\hat{f}(y)\Rightarrow\hat{f}(y)\in C(\mathbb{R})$

3) $\forall\varepsilon>0\ \exists A>0:\ \int_{|x|\ge A}|f(x)|dx<\frac{\varepsilon}{3}\Rightarrow|\hat{f}(y)|\le\left|\int_{-A}^{A}f(x)e^{ixy}dx\right|+\frac{\varepsilon}{3}\ \forall y\in\mathbb{R}\quad \forall y\in\mathbb{R}$
Рассмотрим разбиение $[-A,A]$: $-A=x_0<x_1<\ldots<x_n=A$, для которого верхняя сумма Дарбу S: $0\le S-\int_{-A}^{A}f(x)dx<\frac{\varepsilon}{3}$

$f_1(x)=\begin{cases}M_1, & x\in[x_0,x_1]\\ M_k, & x\in[x_{k-1},x_k],\ k=\overline{2,n}\end{cases}\qquad M_k=\sup\limits_{x\in(x_{k-1},x_k)}f(x)\Rightarrow S=\int_{-A}^{A}f_1(x)dx$

$\int_{-A}^{A}|f_1(x)-f(x)|dx=\int_{-A}^{A}(f_1(x)-f(x))dx=S-\int_{-A}^{A}f(x)dx<\frac{\varepsilon}{2}$

Тогда $\left|\int_{-A}^{A}f(x)e^{ixy}dx\right|\le\left|\int_{-A}^{A}f_1(x)e^{ixy}dx\right|+\int_{-A}^{A}|f_1(x)-f(x)|dx<\left|\sum_{k=1}^{n}M_k\int_{x_{k-1}}^{x_k}e^{ixy}dx\right|+\frac{\varepsilon}{3}\le$
$\le\sum_{k=1}^{n}|M_k|\cdot\left|\frac{e^{ix_ky}-e^{ix_{k-1}y}}{iy}\right|+\frac{\varepsilon}{3}\le\frac{2}{|y|}\sum_{k=1}^{n}|M_k|+\frac{\varepsilon}{3}<\frac{2}{3}\varepsilon$, если $|y|\ge\frac{2}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{n}|M_k|$
$\Rightarrow\forall$ такого y $|\hat{f}(y)|<\varepsilon$

Следствие:

теорема справедлива для косинус/синус преобразований
$a(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos xy\,dx$ и $b(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin xy\,dx$

Таким образом линейное отображение $f(x)\mapsto\hat{f}(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{ixy}dx$ корректно определено на $L_1(R)$

Разложением ф-ции $f(x)$ в интеграл Фурье называют несобственный интеграл:

$$\frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) e^{-ixy} dx = \frac{1}{2\pi} \lim_{\lambda\to+\infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \hat{f}(y) e^{-ixy} dx$$

Теорема 2:

$f(x)\in L_1(\mathbb{R})$ и в $x\in\mathbb{R}$ $f(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера справа и слева с $\alpha\in(0,1]$. Тогда $f(x)$ разложима в этой точке в интеграл Фурье и

$$\frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) e^{-ixy} dy = \frac{1}{2}\left(f(x+0)+f(x-0)\right)$$

Доказательство:

1) $\hat{f}(y)\in C(\mathbb{R}) \Rightarrow \forall\lambda>0:\ \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy}\hat{f}(y)dy = \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{iuy}du\,dy$

$\hat{f}(y)$ сходится равномерно:

$\forall\varepsilon>0\ \exists A_0>0:\ \forall A\geq A_0$ и $\forall y\in[-\lambda,\lambda]: \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{iuy}du - \int_{-A}^{A} f(u)e^{iuy}du\right| < \frac{\pi}{\lambda}\varepsilon$

$\Rightarrow \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy}\hat{f}(y)dy - \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy}\int_{-A}^{A} f(u)e^{iuy}du\,dy\right| < \frac{2\lambda}{2\pi}\cdot\frac{\pi}{\lambda}\varepsilon = \varepsilon$

$\Rightarrow \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-xyi}\hat{f}(y)dy - \frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} f(u)\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-iy(u-x)}dy\,du\right| < \varepsilon\quad \forall A\geq A_0$

$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-iy(u-x)}dy\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy}\hat{f}(y)dy$ – сх-ся

2) $\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-iy(u-x)}dy = \frac{e^{i\lambda(u-x)} - e^{-i\lambda(u-x)}}{i(u-x)} = 2\frac{\sin\lambda(u-x)}{u-x}$

$\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}\hat{f}(y)e^{-ixy}dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\frac{\sin\lambda(u-x)}{u-x}du = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}dt$

3) $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}dt - \frac{1}{2}\left(f(x+0)+f(x-0)\right) = \left\{\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda t}{t}dt = \int_{-\infty}^{0}\frac{\sin\lambda t}{t}dt = \frac{\pi}{2}\right\} =$

$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}dt - \frac{f(x+0)}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda t}{t}dt - \frac{f(x-0)}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin\lambda t}{t}dt =$

$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(f(x+t)-f(x+0)\right)\frac{\sin\lambda t}{t}dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\left(f(x+t)-f(x-0)\right)\frac{\sin\lambda t}{t}dt\quad (*)$

Для $\delta>0$: $\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(f(x+t)-f(x+0)\right)\frac{\sin\lambda t}{t}dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\left(f(x+t)-f(x+0)\right)\frac{\sin\lambda t}{t}dt +$

$+ \int_\delta^{+\infty}\frac{f(x+t)}{\pi t}\sin\lambda t\,dt - \frac{f(x+0)}{\pi}\int_\delta^{+\infty}\frac{\sin\lambda t}{t}dt \equiv I_1+I_2+I_3$

- Рассмотрим I_2: $g(t)=\begin{cases} f(x+t)/\pi t, & t\geq\delta \\ 0, & 0\leq t<\delta\end{cases}$, $g(t)\in L_1(\mathbb{R}) \Rightarrow I_2 \xrightarrow{\lambda\to+\infty} 0$
- Рассмотрим I_3: $\int_\delta^{+\infty}\frac{\sin\lambda t}{t}dt = \int_{\lambda\delta}^{+\infty}\frac{\sin\xi}{\xi}d\xi \to 0\quad \lambda\to+\infty$
- Рассмотрим I_1: $\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\left(f(x+t)-f(x+0)\right)\frac{\sin\lambda t}{t}dt\right| \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\left|f(x+t)-f(x+0)\right|\frac{1}{t}dt \leq$

(Гёльдер) $\leq \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} Mt^{\alpha}\frac{1}{t}dt = \frac{M}{\alpha\pi}\delta^{\alpha}$

Значит, если выбрать $\delta>0$: $\frac{M}{\alpha\pi}\delta^{\alpha}<\frac{\varepsilon}{3}$ и указать λ_0, при $\lambda\geq\lambda_0$: $|I_2|<\frac{\varepsilon}{3}$, $|I_3|<\frac{\varepsilon}{3}$

$\Rightarrow$ модуль первого слагаемого $(*)<\varepsilon$. Аналогично второе.

Замечание: Интегральная форма Фурье

$\frac{1}{2}\left(f(x+0)+f(x-0)\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(a(u)\cos ux + b(u)\sin ux\right)du$, где $a(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\xi u\,d\xi$, $b(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\sin\xi u\,d\xi$

$f(x)$ задана на $\mathbb{R}$ и на каждом $[-l, l]$ допускается разложение в ТРФ:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi n}{l}x+b_n\sin\frac{\pi n}{l}x\right)=$$

$$=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\xi)d\xi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{l}\cos\frac{\pi n}{l}x\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi+\frac{1}{l}\sin\frac{\pi n}{l}x\int_{-l}^{l}f(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi\right)=$$

$$=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\xi)d\xi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\frac{\pi n}{l}(\xi-x)d\xi=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\frac{\pi n}{l}(\xi-x)d\xi$$

Частичная сумма: $\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\frac{\pi n}{l}(\xi-x)d\xi$ и $l^2=N\pi$

$\frac{1}{2l}=\frac{1}{2\pi N}$, $\frac{\pi}{l}=\frac{l}{N}$: $\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{2\pi N}\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\frac{ln}{N}(\xi-x)d\xi$

Коэффициенты $\frac{ln}{N}$ разбивают $[-l, l]$ на части длиной $\frac{l}{N}$: $-l<-l+\frac{l}{N}<-l+\frac{2l}{N}<\ldots<l-\frac{l}{N}<l$

Поэтому это интегральная сумма: $\int_{-l}^{l}\frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos u(\xi-x)d\xi du$

При $l\to+\infty \Rightarrow N\to+\infty$: $f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos u(\xi-x)dx=$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}(a(u)\cos ux+b(u)\sin ux)du,$$ где $a(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos\xi u\, d\xi$, $b(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\sin\xi u\, d\xi$

Интегральная формула Фурье